PROCESOS ESTOCÁSTICOS

PROCESOS ESTOCÁSTICOS
Introducción

Douglas Rivas
Rúben Delgadillo.
Universidad de Los Andes

Clases

CHAPTER 1

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Suerte...

—Douglas

1.1 Objetivos del tema

A continuación se presentan los objetivos que se quiere el estudiante alcance una vez estudiado el tema

- Definir procesos estocásticos identificando los elementos que componen la definición.
- Reconocer cuando un fenómeno o experimento aleatorio es un proceso estocástico.
- Caracterizar los distintos procesos estocásticos según su espacio de estados y espacio de parámetros.
- Determinar la distribución y los momentos de un proceso estocástico.
- Identificar el tipo de proceso de acuerdo a sus propiedades.

1.2 Introducción

En el estudio de las variables aleatorias realizado hasta el momento se han estudiado las características aleatorias del fenómeno pero suponiendo que las mismas permanecen constantes a través del tiempo o el espacio. Al incluir en el estudio la presencia de la variable determinística tiempo (espacio) se está considerando que, de alguna forma, la variable aleatoria depende del tiempo(espacio). En otras palabras, la variable aleatoria dependerá del fenómeno probabilístico y del tiempo. En consecuencia, cualquier función que se establezca en términos de la variable aleatoria, como los son la función de distribución o la función de densidad, serán también dependientes del tiempo.

Uno de los objetivos de este capítulo es construir un modelo que nos permita explicar la estructura y preveer la evolución, al menos a corto plazo, de una variable que observamos a lo largo del tiempo. La variable observada puede ser económica (IPC, demanda de un producto, el inventario de un almacén, entre otras), física (temperatura de un proceso, velocidad del viento en una central eólica, concentración en la atmósfera de un contaminante, etc...), social (número de nacimientos, votos de un determinado partido, etc...), salud (), educación ().

La teoría de los procesos estocásticos se centra en el estudio y modelización de sistemas que evolucionan a lo largo del tiempo, o del espacio, de acuerdo a unas leyes no determinísticas, esto es, de carácter aleatorio.

La forma habitual de describir la evolución del sistema es mediante sucesiones o colecciones de variables aleatorias. De esta manera, se puede estudiar como evoluciona una variable aleatoria a lo largo del tiempo. Por ejemplo, el número de personas que espera ante una ventanilla de un banco en un instante t de tiempo; el precio de las acciones de una empresa a los largo de un año; el número de parados en el sector hotelero a lo largo de una año.

Considere un sistema que puede caracterizarse por estar en cualquier de un conjunto de valores previamente especificado. Suponga que el sistema evoluciona o cambia de un estado a otro a lo largo del tiempo de acuerdo con cierta ley de movimiento, y sea $X(t)$ el valor del sistema en el tiempo t. Si se considera que la forma en la que el sistema evoluciona no es determinista, sino provocada por algún mecanismo aleatorio, entonces puede considerarse que $X(t)$ es una variable aleatoria para cada valor de t. Esta colección de variables aleatorias es la definición de proceso estocástico, y sirve como modelo para representar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo. En general, las variables aleatorias que conforman un proceso no son independientes entre sí, sino que están relacionadas unas con otras de alguna manera particular. Las distintas formas en que pueden darse estas dependencias es una de las características que distingue a unos procesos de otros.

1.3 Definición de Proceso estocástico

La primera idea básica es identificar un proceso estocástico como una sucesión de variables aleatorias $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ donde el subindice indica el instante de tiempo (o espacio) correspondiente.

Esta idea inicial se puede generalizar fácilmente, permitiendo que los instantes de tiempo en los que se definen las variables aleatorias sean continuos. Así, se podrá hablar de una colección o familia de variables aleatorias $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, que da una idea mas exacta de lo que es un proceso estocástico.

Se tenía que una variable aleatoria $X(\omega)$ es una función que va desde un espacio muestral Ω a la recta real, de manera que a cada punto $\omega \in \Omega$ del espacio muestral se le puede asociar un número de la recta real. (Por supuesto dicha función debe cumplir con una condición). De igual manera se define el vector aleatorio. (ver figura 1.1).

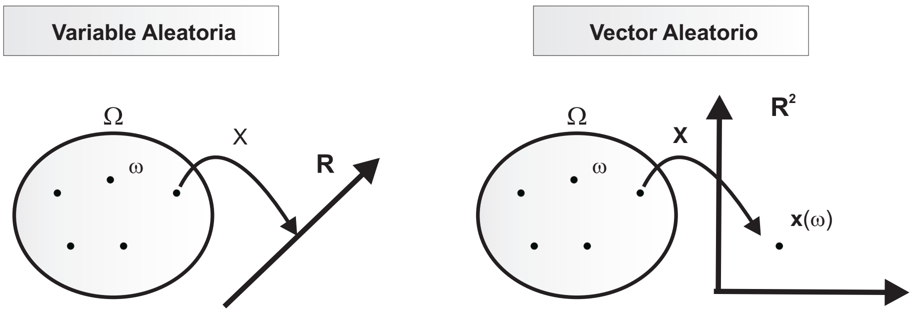

Figure 1.1

Formalmente,

Definición 1.1 (Variable Aleatoria) *$X : \Omega \to R$ tal que $X^{-1}(I) \in \mathfrak{A}$ $I \subseteq R$ y además se cumple que $P[X^{-1}(I)] = P[\omega / X(\omega) \in I]$*

Definición 1.2 (Vector Aleatorio) *$\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)$ es un vector aleatorio definido en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ si y solo si cada $X_i (i = 1, 2, ...)$ es una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*

De este modo, la probabilidad de cada suceso de Ω se puede trasladar a la probabilidad de que un valor de $X(\omega)$ caiga en un cierto intervalo o conjunto de números reales. Si a todo esto se le añade una dimensión temporal o espacial, se obtiene un proceso estocástico.

De manera formal, la definición de proceso estocástico toma como base un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Por lo tanto una definición probabilística y matemática es la siguiente:

Definición 1.3 (Proceso estocástico) *Un proceso estocástico sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, es una función $X : \Omega \times T \to E$ tal que a la pareja (ω, t) se le asocia un valor en E representado por $X(\omega, t)$*

Ω representa el espacio muestral de un experimento aleatorio y T representa un conjunto de valores asociados generalmente con el tiempo o el espacio.

En la figura 1.2 se visualiza gráficamente la definición de un proceso estocástico.

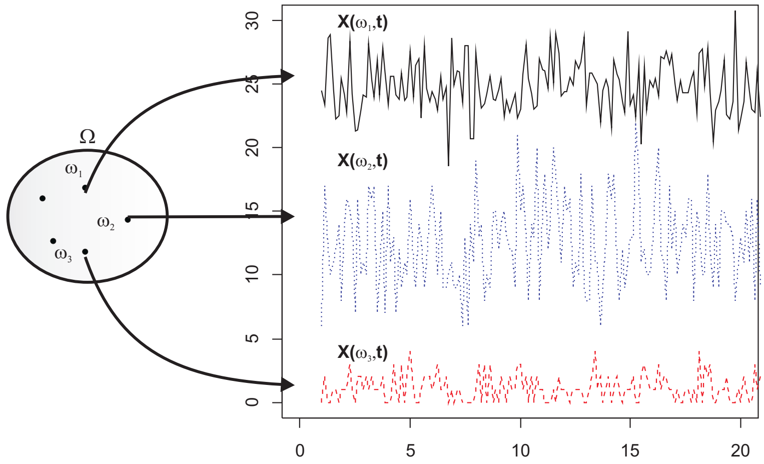

Figure 1.2

EJEMPLO 1.1

Supongamos que una línea de taxi de Mérida tiene a su disposición n vehículos. Se esta interesado en estudiar la velocidad de los vehículos cuando hacen un viaje de Mérida al vigía. En este caso podemos definir $X(\omega, t)$ como la velocidad del vehículo ω al tiempo t de haber comenzado el recorrido. Por supuesto la velocidad registrada depende del auto y del instante de tiempo en el que se mida la velocidad. □

Notemos que la parte aleatoria de un proceso estocástico viene dada por Ω. Por lo tanto, para cada instante t tendremos una variable aleatoria distinta representada por X_t, con lo que un proceso estocástico puede interpretarse como una sucesión de variables aleatorias cuyas características pueden variar a lo largo del tiempo, como se ve en la figura 1.3.

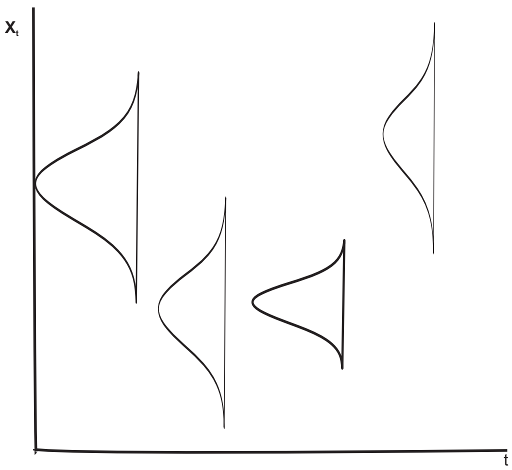

Figure 1.3

En el ejemplo anterior, si fijamos $t = 15$ min., la variable $X(\omega, 15)$ representa la velocidad del carro ω a los 15 minutos de haber salido de Mérida.

De lo dicho anteriormente, se da a continuación una definición de procesos estocásticos que es generalmente más usada

Definición 1.4 (Proceso estocástico) *Un proceso estocástico sobre* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *con espacio de estados E y conjunto de indices T, es una familia de variables aleatorias representada por* $\{X_t : t \in T\}$.

A los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria se le denominan estados, por lo tanto al conjunto de todos los posibles valores se le denomina espacio de estados. Formalmente

Definición 1.5 (Espacio de Estados) *Es el conjunto de todos los posibles valores de* X_t.

El espacio de estados puede ser finito o infinito, tal distinción es muy importante porque la misma da una tipología de los procesos estocásticos.

El otro elemento importante en la definición de proceso estocástico es el espacio de parámetro conocido también como conjunto de indices.

Definición 1.6 (Espacio del Parámetro) *Es el conjunto de posibles indices, usualmente es* $[0, \infty); (-\infty, \infty); \{1, 2, 3, ...\}$*; etc. Usualmente T representa un conjunto de tiempo.*

Al igual que con el espacio de estados, el espacio del parámetro puede ser finito o infinito, y dicha diferenciación definen una tipología de los procesos estocásticos. En el caso finito, se acostumbra sustituir t por n.
Notación Es costumbre escribir

$$\{X_t : t \in T\} \equiv \{X_t(\omega) : \omega \in \Omega; t \in T\} \equiv \{X_t\}_{t \in T}$$

EJEMPLO 1.2

Sea X_t el número de clientes que se encuentran en una cola en el momento t.

$E = \{0, 1, 2, ...\}$

$T = \{t : t \in (-\infty, \infty)\}$

$\square$

EJEMPLO 1.3

Lanzamiento de un dado muchas veces. X_t es la cara del dado que cae en el momento t.

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$T = \{t : t \in (-\infty, \infty)\}$

$\square$

Hemos visto que si fijamos el valor de t obtenemos una variable aleatoria. Por otro lado, si fijamos $\omega \in \Omega$ entonces obtenemos una función $X(\omega) : T \to \mathcal{R}$ sobre el conjunto de parámetros, es decir, a cada evento ω en el espacio Ω le corresponde una función sobre el conjunto de parámetros T.
Por lo tanto, para cada valor de t en T, el mapeo $\omega \to X_t(\omega)$ es una variable aleatoria, mientras que para cada ω en Ω fijo, la función $t \to X_t(\omega)$ es llamada una trayectoria o realización del proceso (ósea que en vez de un valor se tiene una función de t). Es decir, a cada ω del espacio muestral le corresponde una trayectoria del proceso (ver figura 1.4. Es por ello que a veces se define un proceso estocástico como una función aleatoria.

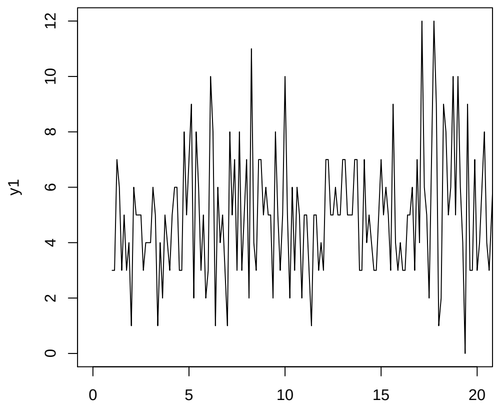

Figure 1.4 Trayectoria de un Proceso Estocástico

Notación

- $X.(\omega)$ para ω fijo $(\omega \in \Omega)$ representa una realización del proceso estocástico.
- $X_t(.)$ para t fijo $(t \in T)$ es una variable aleatoria.

EJEMPLO 1.4

Consideremos el proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ que registra el número de llamadas que llegan a una central telefónica durante un día. Escoger $\omega \in \Omega$ equivale escoger un día del año al azar. Una vez determinado ω tenemos una función $X(\omega) : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, que corresponde al número de llamadas telefónicas recibidas hasta el instante t durante el día ω. Si fijamos t, entonces X_t es una variable aleatoria que representa el número de llamadas hasta el instante t. Ahora si fijamos un conjunto finito de indices $(t_1, t_2, ..., t_n)$ es un vector aleatorio n-dimensional. □

EJEMPLO 1.5

Se lanza una moneda varias veces. Supóngase que cada vez que sale cara, un jugador gana 1 unidad y si sale cruz pierde 1 unidad. Se puede definir un proceso estocástico que modeliza la evolución del juego. Así, si se denomina X_n al número de unidades monetarias que quedan después de n lanzamientos, el espacio muestral de X_n es

$$\Omega = \{n - uplas \text{ de c y s }\}$$

de modo que el número de elementos del conjunto es

$$N(\Omega) = 2^n$$

y el sigma-álgebra que se define es $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, esto es, las partes de Ω.Si consideramos a todas las posibles $n - uplas$ equiprobables entonces $P(\omega) = 1/2^n$.
Es un proceso discreto, porque el conjunto paramétrico es $T = \{1, 2, 3, \cdots\}$ y el posible conjunto d estados es

$$E = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

- Fijemos w y construyamos una trayectoria de $X_t(\omega)$. Vamos a suponer que $n = 6$ y que $\omega = \{c, c, s, s, s, s\}$, entonces

$$X_1(\omega) = 1; X_2(\omega) = 2; X_3(\omega) = 1$$
$$X_4(\omega) = 0; X_5(\omega) = -1; X_6(\omega) = -2$$

- Fijemos t, por ejemplo $t = 3$, y calculemos la distribución de X_3. Haciendo el diagrama de árbol es fácil ver que

$$X_3 = \{-3, -1, 1, 3\}$$

y

$$P(X_3 = -3) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$
$$P(X_3 = -1) = 3\frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}$$
$$P(X_3 = 1) = 3\frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}$$
$$P(X_3 = 3) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

□

Resumiendo

1. $\{X_t : t \in T\}$ es un punto del espacio T y donde para cada $t \in T$, X_t es un punto en el espacio E.

2. $\{X_t : t \in T\}$ podemos considerarlo como la trayectoria de una partícula que se mueve al azar en el espacio E siendo X_t la posición de la partícula en un instante t.

Recordemos E es el espacio de todos los posibles valores de X_t. Los elementos E_j son los estados del proceso.

1.4 Clasificación de los Procesos estocásticos

De acuerdo con la defunción de procesos estocástico vista anteriormente, existen dos elementos muy importantes que los caracterizan, el espacio del parámetro y el espacio de estados. Por lo tanto, tenemos distintos procesos de acuerdo a si dichos espacios son discretos o continuos. Veamos a continuación dicha clasificación

Según T (Espacio del parámetro)

1. Si T es una secuencia finita o infinita numerable, entonces $\{X_t : t \in T\}$ se dice que es un proceso estocástico de parámetro discreto (Cadena estadística).
2. Si T es un intervalo entonces se dice que $\{X_t : t \in T\}$ es un proceso de parámetro continuo.

Según E (Espacio de estado)

1. Si E es un conjunto finito o infinito numerable de estados, entonces $\{X_t : t \in T\}$ es un proceso estocástico discreto en el espacio de estado o proceso estocástico de estado discreto.
2. Si E es un conjunto infinito no numerable de estados, entonces se dice que $\{X_t : t \in T\}$ es un proceso estocástico continuo en el espacio de estado proceso estocástico de estado continuo.

Dicha clasificación no puede verse de manera separada pues un proceso estocástico esta definido por ambos espacios a la vez, siendo así en la siguiente tabla se muestra dicha clasificación

Parámetro / **Estado**	**Discreto**	**Continuo**
Discreto	Cadena	Proceso Puntual
Continuo	secuencia aleatoria	Proceso continuo

Table 1.1 Clasificación de los procesos estocásticos.

Es decir,

- Una **Cadena** es un proceso estocástico en el cual el tiempo se mueve en forma discreta y la variable aleatoria sólo toma valores discretos en el espacio de estados. Un gráfico típico de este tipo de proceso se muestra en la figura 1.5.

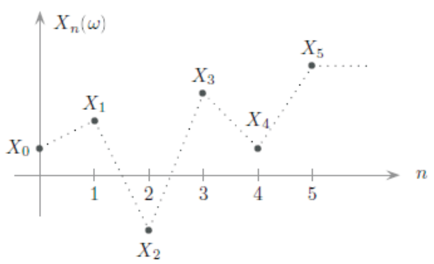

Figure 1.5 Cadena

Por ejemplo, considere una máquina dentro de una fábrica, los posibles estados de para la máquina son que esté operando o que esté fuera de funcionamiento y la verificación de esta característica se realizará al principio de cada día de trabajo. Si hacemos corresponder el estado "fuera de funcionamiento" con el valor 0 y el estado "en operación" con el valor 1, se tiene que el espacio de estado es $E = \{0, 1\}$ y el espacio del parámetro es $T = \{1, 2, ..., 20\}$ correspondientes a los días laborales, la siguiente figura muestra una posible secuencia de cambios de estado a través del tiempo para esa máquina.

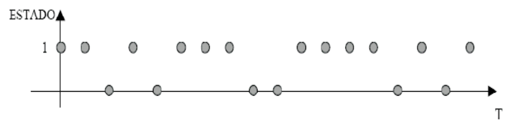

Figure 1.6 Estado de la máquina al inicio del día

- Un **Proceso Puntual** es un proceso estocástico en el cual los cambios de estados pueden ocurrir en cualquier momento pero la variable aleatoria sólo toma valores discretos en el espacio de estados, por ejemplo, unidades producidas hasta el instante de tiempo t. La representación gráfica común de este tipo de procesos se muestra en la figura 1.6

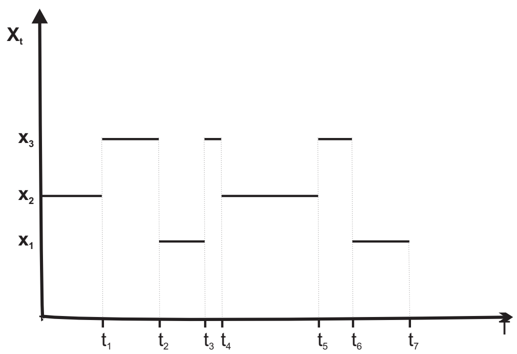

Figure 1.7 Proceso Puntual

Por ejemplo consideremos de numero de estudiantes que están solicitando libros en la biblioteca de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales en un instante de tiempo al día. El espacio de estados esta representado por $E = \{0, 1, 2, ..., n\}$, numero de estudiantes, el cual es discreto, y el espacio de estados sería $T = [0, 480]$ tomando el tiempo en minutos, el cual es continuo.

- En una **secuencia aleatoria** los estados cambian dentro de un conjunto continuo de estados y en momentos determinados de tiempo. La figura 1.5 es un gráfico representativo de este tipo de procesos pero en este caso la variable aleatoria es continua. Un ejemplo de este tipo de la cantidad de lluvia en litros que caen diariamente durante un mes. La cantidad de agua es una variable aleatoria continua, entonces $E = [0, \infty)$, y el espacio del parámetro sería $T = \{1, 2, ..., 00\}$ días del mes.

- En un **proceso continuo** los cambios de estados se producen en cualquier instante y hacia cualquier estado dentro de un espacio continuo de estados. La figura 1.8 muestra gráficamente un proceso de este tipo.

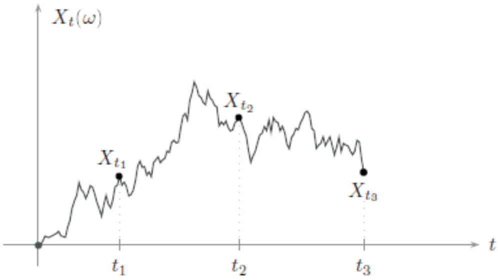

Figure 1.8 Proceso Continuo

Por ejemplo sea $\{X_t : t \in T\}$ un proceso estocástico donde X_t es el flujo de agua en un río en un intervalo de tiempo. Según T es de parámetro continuo y según E es un proceso estocástico continuo.

1.5 Distribución de orden k de un proceso estocástico

Definición 1.7 *La Función de Distribución de orden k del proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$, es la función de distribución conjunta del vector aleatorio $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_k}$, es decir*

$$F(x_1, x_2, ..., x_k; t_1, t_2, ..., t_k) = P[X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, ..., X_{t_k} \leq x_k]$$

Definición 1.8 *La Función de de masa de probabilidad y la función de densidad de orden k del proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$, están dadas respectivamente por*

$$P(x_1, x_2, ..., x_k; n_1, n_2, ..., n_k) = P[X_{n_1} = x_1, X_{n_2} = x_2, ..., X_{n_k} = x_k]$$

y

$$f(x_1, x_2, ..., x_k; t_1, t_2, ..., t_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1, ..., x_k} F(x_1, x_2, ..., x_k; t_1, t_2, ..., t_k)$$

EJEMPLO 1.6

Consideremos el lanzamiento de una moneda varias veces. Cada vez que la moneda cae cara la partícula se mueve una posición hacia atrás, en caso contrario se mueve una posición hacia adelante. Sea $p = P[\{sello\}]$. Sea X_n la posición de la partícula en el tiempo $n = 2$. Estamos interesados en hallar la función de masa de probabilidad de orden j del proceso.

Como $n = 2$ nos interesa modelar la posición de la partícula una vez que la moneda ha sido lanzada dos veces. El espacio muestral del experimento aleatorio es

$$\Omega = \{ss, sc, cs, cc\}$$

donde $\{s\}$ es sello y $\{c\}$ es cara. La variable aleatoria X_n toma los siguientes valores:

- $X_2 = -2$ cuando ocurre $\omega = \{cc\}$,
- $X_2 = 0$ cuando ocurre $\omega = \{sc\}$ ó $\omega = \{cs\}$
- $X_2 = 2$ cuando ocurre $\omega = \{ss\}$

Ahora bien,

- $P[X_2 = -2] = P[\{cc\}] = (1-p)(1-p) = (1-p)^2$
- $P[X_2 = 0] = P[\{sc\} \cup \{cs\}] = P[\{sc\}] + P[\{cs\}] = (1-p)p + p(1-p) = 2p(1-p)$
- $P[X_2 = 2] = P[\{cc\}] = (p)(p) = p^2$

Por lo tanto,

$$P[X_2 = x] = \begin{cases} (1-p)^2, & \text{si } x = -2; \\ 2p(1-p), & \text{si } x = 0; \\ p^2, & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

□

1.6 Primer y Segundo Momento de un Proceso Estocástico

Así mismo como la media, la varianza y la covarianza nos permiten caracterizar, al menos parcialmente, variables y vectores aleatorios, también podemos caracterizar un proceso estocástico con la ayuda de sus momentos.

Definición 1.9 *La media $E[X_t]$ de un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ en el tiempo t se denota por $m_X(t)$. Además la función de autocorrelación y la función de autocovarianza del proceso en el punto (t_1, t_2) son definidas respectivamente por*

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X_{t_1}, X_{t_2}] \\ Cov_X(t_1, t_2) &= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1) m_X(t_2) \end{aligned}$$

Finalmente, el coeficiente de correlación del proceso estocástico en el punto (t_1, t_2) es

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{Cov_X(t_1, t_2)}{[Cov_X(t_1, t_1) Cov_X(t_2, t_2)]^{1/2}}$$

Se usa el prefijo auto porque la función es calculada para dos valores del mismo proceso $\{X_t, t \in T\}$. La función $R_{X,Y}(t_1, t_2) = E[X_{t_1} Y_{t_2}]$ donde $\{Y_t, t \in T*\}$ es otro proceso estocástico, es llamada la **Función de Correlación Cruzada**. De hecho en nuestro caso podemos omitir el prefijo.

La función $R_X(t, t) = E[X_t^2]$ es llamada la potencia promedio del proceso estocástico. Además la **Varianza** del proceso en el tiempo t es

$$Var[X_t] = Cov_X(t, t)$$

EJEMPLO 1.7

Sea Y una variable aleatoria que se distribuye $U(0,1)$. Definamos el proceso estocástico$\{X_t, t \geq 0\}$ por

$$X_t = e^Y t, \, t \geq 0$$

Vamos a calcular la función de densidad de primer proceso, la media y la función de autocorrelación.

Usando la técnica de la transformación se tiene que la función de densidad de primer orden del proceso está dada por

$$f(x,t) = f_{X_t}(x) = f_Y[\ln(x/t)] \left| \frac{d\ln(x/t)}{dt} \right| = 1$$

$$\begin{aligned} f(x,t) &= f_{X_t}(x) = f_Y[\ln(x/t)] \left| \frac{d\ln(x/t)}{dt} \right| \\ &= 1 \left| \frac{1}{x/t} 1/t \right| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x}, \, \forall x \in (t, te) \end{aligned}$$

La media es

$$\begin{aligned} E[X_t] &= E[e^Y t] = tE[e^Y] = t \int_0^1 e^y 1 dy = te^y \Big|_0^1 \\ &= t(e^1 - e^0) = t(e-1), \, t \geq 0 \end{aligned}$$

o de manera equivalente,

$$\begin{aligned} E[X_t] &= \int_t^{te} x \frac{1}{x} dx = \int_t^{te} dx = x \Big|_t^{te} \\ &= te - t = t(e-1), \, t \geq 0 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$X_t X_{t+s} = e^Y t e^Y (t+s) = e^{2y} t(t+s)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R_X(t, t+s) &= E[X_t, X_{t+s}] = E[e^{2y} t(t+s)] = t(t+s) E[e^{2y}] \\ &= t(t+s) \int_0^1 e^{2y} dy = t(t+s) \frac{e^{2y}}{2} \Big|_0^1 = \frac{t(t+s)}{2} [e^2 - 1], \, \forall s, t \geq 0 \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 1.8

Ensayos independientes para los cuales la probabilidad de éxito es la misma para cada uno de estos ensayos son llamados ensayos Bernoulli. Por ejemplo, podemos lanzar un dado independientemente un número indefinido de veces y definir un éxito cuando cae el ”6”, Un proceso Bernoulli, es una sucesión $X_1, X_2, ...$ de variables aleatorias

Bernoulli asociadas con ensayos Bernoulli. Esto es, $X_k = 1$ si el k-esimo ensayo es un éxito y $x_k = 0$ en otro caso. Podemos fácilmente calcular

$$E[X_k] = \sum_{x_k=0}^{1} x_k P(x_k) = 0(1-p) + 1(p) = p$$

donde p es la probabilidad de un éxito, y

$$\begin{aligned} R_X(k_1, k_2) &= E[X_{k_1} X_{k_2}] = \sum_{x_{k_1}=0}^{1} \sum_{x_{k_2}=0}^{1} x_{k_1} x_{k_2} P[x_{k_1} x_{k_2}] \\ &= \sum_{x_{k_1}=0}^{1} \sum_{x_{k_2}=0}^{1} x_{k_1} x_{k_2} P[x_{k_1}] P[x_{k_2}] \\ &= 0 * 0(1-p)^2 + 0 * 1(1-p)p + 1 * 0 * p(1-p) + 1 * 1 + p^2 = p^2 \end{aligned}$$

si $k - 1 = k_2 = k$,

$$R_X(k, k) = E[X_k^2] = \sum_{x_k=0}^{1} x_k^2 P[x_k] = 0^2(1-p) + 1 * p = p$$

Entonces,

$$Cov_X(k_1, k_2) = \begin{cases} p^2 - p * p = 0, & \text{si } k_1 \neq k_2; \\ Cov_X(k, k) = p - p^2 = p(1-p), & \text{si } k_1 = k_2 = k. \end{cases}$$

□

1.7 Propiedades de los Procesos Estocásticos

Algunos procesos estocásticos presentan propiedades las cual permiten su estudio de manera más fácil pues se simplifican los cálculos en los mismos. En este caso vamos a estudiar tres de las propiedades más importantes: Procesos estacionarios, procesos Markovianos y procesos con incrementos independientes.

1.7.1 Procesos Estacionarios

Intuitivamente, un proceso estacionario es aquel que, a lo largo del tiempo, mantiene sus características estadísticas.

Por ejemplo, si se sintoniza un receptor de FM en un canal libre, se oye un ruido de fondo. Ese ruido de fondo suena siempre igual . No cambia de volumen ni de sonido con el tiempo, ni a lo largo del día. Un ejemplo de proceso no estacionario sería la temperatura ambiente en Mérida. Sabemos bien que la temperatura promedio en en diferentes épocas del año la temperatura promedio es distinta. Esta correlación entre la época y, en este caso, el promedio de temperatura, sugiere la no estacionareidad del proceso.
Existen dos clases de procesos estacionarios: Débil y estricto.

Definición 1.10 (Estacionario Débil) *Decimos que el proceso estocástico* $\{X_t, t \in T\}$ *tal que* $E[X_t^2] < \infty$ *es un proceso estacionario débil o estacionario en sentido amplio si*

1. $E[X_t] = m \, \forall t \in T$
2. $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1)$

Esta es la acepción de estacionariedad más utlizada en la práctica.

Observaciones:

1. Debe existir el momento de orden 2 de las variables aleatorias.
2. Ya que $E[X_t] = m$, si $\{X_t, t \in T\}$ es un proceso estacionario débil entonces

$$\begin{aligned} Cov_X(t_1, t_2) &= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) = R_X(t_2 - t_1) - m^2 \\ &= Cov_X(t_2 - t_1) = Cov_X(h) \qquad h = t_2 - t_1 \end{aligned}$$

   Es decir que la función de autocovarianzas toma el mismo valor para 2 variables aleatorias separadas por un retardo h en el proceso, independientemente de donde se encuentren estas 2 variable s aleatorias en el tiempo.

3. Si seleccionamos $t_1 = t_2 = t$ obtenemos $R_X(t, t) = E[X_t^2] = R_X(0) \, \forall t$. Además $Cov_X(t, t) = E[X_t^2] - m^2 = Var[X_t] = R_X(0) - m^2$ no depende de t.
4. Si tomamos $t_1 = t$ y $t_2 = t + s$

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(t + s - t) = R_X(s)$$

Definición 1.11 (Estacionario Estricto) *Decimos que el proceso estocástico* $\{X_t, t \in T\}$ *es un proceso estacionario estricto si su función de distribución es invariante bajo cualquier cambio de origen*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = F(x_1, x_2, ..., x_n; t_1{+}s, t_2{+}s, ..., t_n{+}s) \qquad \forall s, n, t_1, ..., t_n$$

es decir si $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in T$ *y* $\forall \{t_1, t_2, ..., t_n\} \in T$ *las variables aleatorias* $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ *tiene la misma distribución conjunta que* $(X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, ..., X_{t_n+s})$

Observaciones:

1. En la práctica es difícil demostrar que un proceso es estacionario estricto (Excepto en el caso de un proceso gaussiano). En consecuencia, a menudo nos conformamos con una versión más simple de la noción de estacionariedad, al considerar sólo los casos cuando $n = 1$ y $n = 2$.
2. Si $\{X_t, t \in T\}$ es un proceso estacionario estricto entonces cuando $n = 1$

$$F(x; t) = F(x; t + s)$$

   es decir, todas las variables aleatorias tienen la misma distribución y si suponemos que $E[X_t^2] < \infty$ entonces $m_X(t) = m$ la cual es la condición 1 del proceso débil.

Cuando n=2

$$F(x_{t_1}, x_{t_2}; t_1, t_2) = F(x_1, x_2; t_1 + s, t_2 + s) = F(x_1, x_2; t_2 - t_1)$$

esto implica que

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1)$$

la cual es la condición 2 del proceso estacionario débil.

Por lo tanto, si un proceso es estacionario estricto entonces es estacionario débil. Lo contrario por lo general no es cierto.

EJEMPLO 1.9

El proceso Poisson,denotado como $\{N_t, t \geq 0\}$ tiene las siguientes características

$$E[N(t)] = \lambda t, \qquad R_X(t_1, t_2) = \lambda_{\min(t_1, t_2)}$$

es fácil ver que no es estacionario pues $E[N_t]$ depende de t.
Ahora si definimos $X_t = \frac{N_t}{t}$ entonces $E[X_t] = \lambda$ no depende de t pero $R_X(t_1, t_2)$ no puede escribirse como $R_X(t_2 - t_1)$. Por lo tanto tampoco es estacionario. □

EJEMPLO 1.10

Consideremos el ejemplo 1.6, que por comodidad reescribimos la función de masa de probabilidad de orden 2

$$P[X_2 = x] = \begin{cases} (1-p)^2, & \text{si } x = -2; \\ 2p(1-p), & \text{si } x = 0; \\ p^2, & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

□

1.7.2 Procesos Markovianos.

La característica principal de los procesos estocásticos markovianos es que la distribución de X_{n+1} sólodepende de la distribución de X_n y no de las anteriores que el estado futuro del proceso, sólo depende del estado presente, y no del resto de estados pasados. Formalmente se expresa como:
$\forall n \in N$ y $\forall t_1 < ... < t_n$

$$P(X_{t_n} \leq x_n | X_{t_1} \leq x_1, ..., X_{t_{n-1}} \leq x_{n-1}) = P(X_{t_n} \leq x_n | X_{t_{n-1}} \leq x_{n-1})$$

Cuando el espacio de estados E es discreto, entonces se puede escribir

$$P(X_{t_n} = x_n | X_{t_1} = x_1, ..., X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$

1.7.3 Procesos de incrementos independientes.

Se dice que un proceso $\{X_t$ tal que $t \in T\}$ es de incrementos independientes si $\forall n \in N, \forall t_1, ..., t_n \in T$, con $t_1 < ... < t_n$, las variables aleatorias

$$\begin{aligned} y_1 &= X_{t_2} - X_{t_1} \\ y_2 &= X_{t_3} - X_{t_2} \\ &\ldots \\ y_{n-1} &= X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \end{aligned}$$

Son independientes.

Proposición 1.1 *Todo proceso de incrementos independientes es un proceso markoviano.*
Justificación
Supongamos un proceso $\{X_1, X_2, X_3\}$ y hay que demostrar que

$$P(X_3 = x_3|X_2 = x_2, X_1 = x_1) = P(X_3 = x_3|X_2 = x_2)$$

para ver que es markoviano.
Así (dado que se conocen $X_2 = x_2$ y $X_1 = x_1$)

$$\begin{aligned} P(X_3 = x_3|X_2 = x_2, X_1 = x_1) &= P(X_3 - X_2 = x_3 - x_2|X_2 = x_2, X_2 - X_1 = x_2 - x_1)(*) \\ &= P(X_3 - X_2 = x_3 - x_2|X_2 = x_2) \\ &= P(X_3 = x_3|X_2 = x_2) \end{aligned}$$

(*) por hipótesis, los incrementos son independientes.
Quedando así probado.

1.8 Ejercicios

Los ejercicios están disponibles en mi página web.
COSAS QUE DEBO MEJORAR EN LA CLASIFICACIÓN